

08-02 Polynômes à coefficients complexes

Définitions

Soient n un entier naturel et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes tels que $a_n \neq 0$.

On appelle **polynôme de degré n** la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$.

On appelle **racine du polynôme P** tout nombre z_0 tel que $P(z_0) = 0$.

On appelle **polynôme nul** la fonction qui, à tout nombre complexe, associe 0.

Le polynôme nul n'a pas de degré.

Exemples

$P(z) = z^4 - z + i + 5$ est un polynôme de degré 4 dont $(i + 1)$ est une racine.

$P(z) = 2i - 6$ est un polynôme de degré 0 n'ayant pas de racine.

Propriété et définition

Soit P un polynôme non nul de degré n et soit un nombre complexe a .

a est racine de P si et seulement s'il existe un polynôme Q tel que $P(z) = (z - a)Q(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

On dit alors que P est **factorisable** (ou **divisible**) par $(z - a)$.

Exemple

$P(z) = z^4 - z + i + 5$ est factorisable par $(z - i - 1)$ et peut s'écrire $P(z) = (z - i - 1)(z^3 + (1 + i)z^2 + 2iz - 3 + 2i)$.

Propriété

Soit un nombre complexe a et un entier naturel non nul n .

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $z^n - a^n = (z - a)(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2 z^{n-3} + \dots + a^{n-2} z + a^{n-1})$

Exemple

$$z^4 - 625 = (z - 5)(z^3 + 5z^2 + 25z + 125)$$

Propriétés

- Un polynôme est le polynôme nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.
- Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines distinctes.
- Si $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ admet $(n + 1)$ racines distinctes alors il est le polynôme nul.

08-02 Applications du cours**Application 1**

Dans chacun des cas suivants, on admet que z_0 est une racine du polynôme P . Factoriser P .

a] $z_0 = -3$ et $P(z) = z^3 + 9z^2 + 36z + 54$.

c] $z_0 = 2$ et $P(z) = z^5 - 2z^4 - 4z^3 + 3z^2 + 13z - 6$.

b] $z_0 = i$ et $P(z) = 3z^3 + 5z^2 + 3z + 5$.

d] $z_0 = 1 - i$ et $P(z) = z^4 + 2iz^3 - 4z + 4$.

Application 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^3 - 216 = 0$.

Application 3

- Donner un exemple de polynôme du second degré admettant...
 - deux solutions complexes conjuguées.
 - une solution unique, non réelle.
- Écrire un polynôme P du second degré à coefficients réels admettant $(4 + i)$ pour racine et tel que $P(0) = 4$.
- Trouver un polynôme de degré 4 à coefficients réels dont les racines, toutes de module 5, sont : deux nombres imaginaires purs et deux nombres ayant une partie réelle strictement positive.

Application 4

Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 + 4$.

- Calculer $(1 + i)^4$.
- Déterminer l'ensemble des racines du polynôme P .
- Déterminer la nature du quadrilatère formé par les points images des racines de P .

Application 5

- Les polynômes de la forme $P(x) = ax^4 + bx^2 + c$ (avec a , b et c réels) sont appelés **polynômes bicarrés**.
Montrer que, lorsque $c < 0$, le polynôme $P(x) = x^4 + bx^2 + c$ a exactement deux racines réelles opposées.
- Résoudre l'équation $z^2 = 3 + 4i$ en posant $z = x + iy$.
Ces solutions sont appelées **racines carrées complexes** de $3 + 4i$.
- Déterminer les racines carrées complexes des nombres suivants.

a] $-5 + 12i$	b] $4i$	c] $-1 - 2i$
----------------------	----------------	---------------------